Coordonator VASILE POP

Vasile Pop

Dana Heuberger

MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

Clasa a XI-a

Volumul I. Algebră

Ediția a II-a, revizuită și adăugită

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

CAPITOLUL 1. PERMUTĂRI

ELEMENTE TEORETICE

Cu toate că în clasa a XI-a capitolul despre permutări are un rol secundar, o bună înțelegere și folosire a acestuia deschide calea spre o abordare cu succes, în clasa a XII-a, a structurilor algebrice. Vom revedea atunci, într-un context mai larg, multe dintre metodele și ideile utilizate în problemele teoretice legate de permutări. Mai mult decât atât, în mulțimea permutărilor de un anumit grad vom găsi de multe ori exemple și contraexemple sugestive legate de anumite proprietăți ale legilor de compoziție necomutative. Sunt doar câteva motive, puternice însă, ce recomandă o studiere atentă a temei de către toți cei pasionați de algebră.

Vom trece în revistă noțiunile și notațiile care apar în manualele școlare.

1. Dacă A este o mulțime nevidă, atunci orice funcție bijectivă $f: A \to A$ se numește *permutare* a sa. Mulțimea $S(A)$ a tuturor permutărilor mulțimii A, împreună cu operația de compunere a funcțiilor, se numește *grupul simetric* sau *grupul substituțiilor* lui A.

Dacă pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem mulțimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci funcția bijectivă $f: A \to A$, $f(a_k) = a_{i_k}$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ este bine determinată de funcția bijectivă $\sigma: \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma(k) = i_k$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ și reciproc. De aceea, este suficient să studiem comportamentul permutărilor mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, numite și permutări de *grad* n. Notăm cu S_n sau σ_n mulțimea permutărilor de grad n și cu litere mici grecești elementele sale. Știm că S_n are $n!$ elemente.

Permutarea $\sigma \in S_n$ se reprezintă astfel: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

σ fiind o funcție bijectivă, avem: $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)\} = \{1, 2, ..., n\}$.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, funcția identică a mulțimii $A = \{1, 2, ..., n\}$ se notează cu

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$$

și se numește *permutarea identică de gradul* n.

Deoarece mulțimea $S_1 = \{e\}$ conține doar permutarea identică, atunci când nu vom specifica altfel, vom considera, *în tot capitolul*, că avem de a face cu mulțimea S_n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Pentru $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, numim *transpoziție* permutarea

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Transpoziția τ_{ij} diferă de permutarea identică doar pentru argumentele i și j.

Altfel spus, $\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i \\ i, & k = j \\ k, & k \notin \{i, j\} \end{cases}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

4. Uneori, transpozițiile se notează astfel: $\tau_{ij} = (i\ j)$ sau $\tau_{ij} = (i, j)$.

5. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, operația de compunere a funcțiilor se definește pentru orice două permutări din S_n. O numim *produsul* permutărilor.

Știm că produsul oricăror două permutări este tot o permutare.

Produsul permutărilor este o operație asociativă, permutarea identică este elementul neutru al acesteia și funcția inversă a oricărei permutări din S_n este tot o permutare. Mai mult, pentru $n \geq 3$, produsul permutărilor este o operație necomutativă.

6. Pentru $\sigma \in S_n$, considerăm că $\sigma^0 \overset{def}{=} e$.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sigma^{-n} \overset{def}{=} (\sigma^n)^{-1}$. Mai mult, $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$.

7. Pentru $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$; $\tau_{ij}^2 = e$; $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$.

8. Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, ..., n\}$. Există $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ transpoziții de gradul n.

9. Pentru $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, cu $i \neq j$, perechea (i, j) se numește *inversiune* a permutării $\sigma \in S_n$, dacă $\begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$.

Notăm cu $m(\sigma)$ numărul inversiunilor permutării σ.

Numărul $m(\sigma)$ este mai mic sau egal decât numărul perechilor ordonate (i, j), cu $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ și $i < j$. Așadar, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \sigma \in S_n$, $0 \leq m(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

10. Atenție la faptul că la inversiuni notația (i, j) reprezintă *o pereche ordonată de numere naturale*, pe când transpoziția $\tau_{ij} = (i, j)$ este *o permutare*, deci este o funcție.

11. Numărul $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$ se numește *semnul (signatura)* permutării $\sigma\in S_n$. Dacă $\varepsilon(\sigma)=1$, spunem că σ este o *permutare pară*, iar dacă $\varepsilon(\sigma)=-1$, spunem că σ este o *permutare impară*.

Orice transpoziție este o permutare impară.

12. Dacă $\sigma\in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

13. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ și $\sigma,\theta\in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma\cdot\theta)=\varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\theta)$.

14. Notăm cu A_n mulțimea permutărilor pare de gradul n (grupul *altern* de gradul n). Mulțimea A_n are $\dfrac{n!}{2}$ elemente și este stabilă față de produsul permutărilor, adică $\forall\,\sigma,\theta\in A_n$, avem $\sigma\cdot\theta\in A_n$. Mai mult, $e\in A_n$ și $\forall\,\sigma\in A_n\Rightarrow\sigma^{-1}\in A_n$.

În cele ce urmează, vom defini ordinul unei permutări, o noțiune cu care ne vom întâlni în clasa a XII-a, în cazul general al structurilor algebrice. Uneori, pentru a putea determina mai ușor acest ordin, este bine să folosim descompunerea permutării într-un produs de cicluri independente.

1.1. Definiție. Fie $k\in\{2,\dots,n\}$ și $i_1,i_2,\dots,i_k\in\{1,2,\dots,n\}$ distincte.

Permutarea $(i_1,i_2,\dots,i_k)=\begin{pmatrix}1 & \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots & i_{k-1} & \dots & i_k & \dots & n\\ 1 & \dots & i_2 & \dots & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_1 & \dots & n\end{pmatrix}$ se numește *ciclu de lungime k*.

Altfel spus, $\sigma=(i_1,i_2,\dots,i_k)$ dacă $\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\dots,\sigma(i_{k-1})=i_k,\sigma(i_k)=i_1$ și $\forall\,i\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$, $\sigma(i)=i$.

1.2. Exemplu. Avem $(1,3,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\in S_4$ și $(1,3,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{pmatrix}\in S_5$.

$(1,4,3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\in S_4$ și $(1,4,3)\ne(1,3,4)$, deci este importantă ordinea elementelor unui ciclu.

1.3. Observație. Orice transpoziție este un ciclu de lungime 2.

Vom folosi de multe ori notația $\tau_{ij}=(i\ j)$ pentru o transpoziție, pentru a nu confunda permutarea precedentă cu perechea ordonată de numere naturale (i,j).

1.4. Observație. Pentru a scrie ciclul $(i_1,i_2,\dots,i_k)$, putem folosi notația $(i_2,i_3,\dots,i_k,i_1)$ sau orice permutare circulară a componentelor ciclului.

De exemplu, $(1,4,3)=(4,3,1)=(3,1,4)\in S_5$.

1.5. Observație.
Inversul ciclului $c=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in S_n$ este ciclul $c^{-1}=(i_k,i_{k-1},\ldots,i_1)\in S_n$.

1.6. Definiție. Fie $k,l\in\{1,2,\ldots,n\}$ și ciclurile $c_1=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in S_n$ și $c_2=(j_1,j_2,\ldots,j_l)\in S_n$. Spunem că ciclurile sunt *independente* (disjuncte) dacă

$$\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\cap\{j_1,j_2,\ldots,j_l\}=\varnothing.$$

1.7. Propoziție. Fie ciclurile independente $c_1,c_2\in S_n$. Atunci, $c_1\cdot c_2=c_2\cdot c_1$.

1.8. Propoziție. Fie $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ și ciclul $c_1=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in S_n$.
Atunci,
$$(i_1,i_2,\ldots,i_k)=(i_1,i_k)\cdot(i_1,i_{k-1})\cdot\ldots\cdot(i_1,i_2).$$

1.9. Consecință. Fie $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ și ciclul $c=(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in S_n$.
Signatura sa este:
$$\varepsilon(c)=\varepsilon((i_1,\ i_2,\ \ldots,i_k))=(-1)^{k-1}.$$

1.10. Propoziție. Orice permutare din S_n se poate descompune într-un produs finit de transpoziții.

Demonstrație: Fie $\sigma\in S_n$. Vom demonstra afirmația prin inducție după numărul m al acelor numere $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ pentru care $\sigma(i)\neq i$ (deci care nu sunt *puncte fixe* pentru σ).

Pentru $m=0$, toate elementele permutării σ sunt fixe, deci $\sigma=e=(12)(12)$.

Fie $k\in\mathbb{N}$, $k\leq n-1$. Presupunem că afirmația este adevărată pentru toate permutările din S_n care au cel mult k puncte care nu sunt fixe. Fie $\sigma\in S_n$ o permutare care are $k+1$ puncte care nu sunt fixe. Fie $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ cu $\sigma(i)=j\neq i$.

Considerăm permutarea $\sigma'=(i\ j)\sigma$. Fie $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ cu $\sigma(k)=i$.

Avem că $\sigma'(i)=i$ și $\forall l\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i,k\}$, $\sigma'(l)=\sigma(l)$. Așadar, permutarea σ' are cel mult k puncte care nu sunt fixe și aplicând ipoteza de inducție, o putem descompune într-un produs de transpoziții. Cum $\sigma=(i\ j)\sigma'$, rezultă că putem descompune și σ într-un produs de transpoziții. Din principiul inducției noetheriene rezultă concluzia.

1.11. Exemplu. Descompunem $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}\in S_5$ în produs de transpoziții:

Identificăm, de la stânga la dreapta, prima coloană care nu are elementele egale. În exemplul nostru este vorba despre cea de-a doua coloană, căci avem $\sigma(2)=5$. Înmulțim la stânga permutarea inițială cu transpoziția τ_{25}. Obținem:

$$\tau_{25}\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}=\sigma_1.$$

Deoarece în σ_1 prima coloană care nu are elementele egale este cea de a treia și $\sigma_1(3)=4$, înmulțim la stânga egalitatea anterioară cu transpoziția τ_{34}:

$$\tau_{34}\cdot\tau_{25}\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}=\tau_{45}.$$

Înmulțind la stânga ultima relație cu τ_{34} obținem: $\tau_{34}^2\cdot\tau_{25}\cdot\sigma=\tau_{34}\cdot\tau_{45}$, adică

$$\tau_{25}\cdot\sigma=\tau_{34}\cdot\tau_{45}\overset{\tau_{25}\cdot|}{\Leftrightarrow}\sigma=\tau_{25}\cdot\tau_{34}\cdot\tau_{45}.$$

1.12. Consecință.
Orice permutare pară se poate descompune într-un număr par de transpoziții.
Orice permutare impară se poate descompune într-un număr impar de transpoziții.

Demonstrație: Se aplică propoziția 1.10 și faptul că orice transpoziție este impară, iar signatura produsului permutărilor este egală cu produsul signaturilor acelor permutări.

1.13. Observație. Mulțimea S_n e *generată* de mulțimea transpozițiilor sale. Adică, orice permutare din S_n este un produs finit de transpoziții.

Deoarece $(i,j)=(1,i)(1,j)(1,i)$, $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ cu $i\neq j$, permutările din mulțimea $G_1=\{(1,2),(1,3),\dots,(1,n)\}$ generează S_n. Spunem că mulțimea G_1 este un *sistem de generatori* pentru S_n.

Alte sisteme de generatori pentru S_n sunt:

$$G_2=\{(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\}\ \text{ și }\ G_3=\{(1,2),(1,2,\dots,n)\}.$$

Într-adevăr, din faptul că $\forall k\in\{2,\dots,n\}$, avem $(1,k-1)(k-1,k)(1,k-1)=(1,k)$, rezultă inductiv că elementele lui G_2 le generează pe cele ale lui G_1, deci pe toate permutările din S_n.

Deoarece $\forall k\in\{2,\dots,n-1\}$, $(1,2,\dots,n)\cdot(k-1,k)\cdot(n,n-1,\dots,1)=(k,k+1)$, rezultă inductiv că toate elementele lui G_2 sunt generate de cele ale lui G_3, așadar această din urmă mulțime este un sistem de generatori al lui S_n.

1.14. Propoziție. Pentru orice permutare $\sigma\in S_n$ există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k=e$.

Demonstrație: Dacă $\sigma=e$, atunci, evident, $k=1$ este o soluție.
Dacă $\sigma\neq e$, atunci, deoarece pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$ permutările $\sigma,\sigma^2,\dots\sigma^m,\dots$ fac parte din mulțimea finită S_n, rezultă că există $i,j\in\mathbb{N}^*$, cu $i<j$, astfel încât $\sigma^i=\sigma^j$. Obținem: $\sigma^i=\sigma^j\Leftrightarrow\sigma^i\cdot e=\sigma^i\cdot\sigma^{j-i}\overset{\sigma^i\text{ bij}}{\Leftrightarrow}e=\sigma^{j-i}$ și alegem $k=j-i\in\mathbb{N}^*$.

1.15. Definiție (ordinul unei permutări). Fie $\sigma\in S_n$. Se numește *ordinul* permutării σ cel mai mic număr $t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^t=e$.

1.16. Observație. Ordinul permutării $\sigma \in S_n$ se notează $\operatorname{ord}(\sigma)$.
Este evident că dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\operatorname{ord}(\sigma) \leq n!$.

Acceptăm fără demonstrație (până în clasa a XII-a) următoarea:

1.17. Propoziție. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\operatorname{ord}(\sigma) \mid n!$.

1.18. Propoziție. Fie $\sigma \in S_n$, cu $\operatorname{ord}(\sigma) = t$ și $k \in \mathbb{Z}$ astfel ca $\sigma^k = e$.
Atunci, $t \mid k$.

Demonstrație: Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $k_1 \in \mathbb{Z}$, $r = \overline{0, t-1}$, astfel încât $k = t \cdot k_1 + r$. Avem $e = \sigma^k = \left(\sigma^t\right)^{k_1} \cdot \sigma^r = \sigma^r$.

Deoarece $0 \leq r < t$ și t este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^t = e$, rezultă că $r = 0$, deci $t \mid k$.

1.19. Propoziție. Fie $k \in \{2, \ldots, n\}$ și ciclul $c = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S_n$.
Atunci, $\operatorname{ord}(c) = k$.

1.20. Propoziție. Fie $\sigma, \tau \in S_n$, astfel încât $\sigma\tau = \tau\sigma$. Atunci, ordinul permutării $\sigma\tau$ este cel mai mic multiplu comun al ordinelor permutărilor σ și τ.

1.21. Propoziție. Orice permutare $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$ se poate descompune într-un produs de cicluri *independente* (*disjuncte*). Mai mult, această descompunere e unică.

Demonstrație: Se folosește aceeași idee ca în propoziția 1.9., înmulțind la stânga permutarea σ cu $c^{s-1} = c^{-1}$, unde $c = (i_1, i_2, \ldots, i_s) \in S_n$ este ciclul permutării σ pentru care i_1 este minim.

1.22. Exemplu. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 9 & 6 & 8 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (137)(49)(568)$.

1.23. Observație. Dacă permutarea $\sigma \in S_n$ este descompusă într-un produs de cicluri disjuncte, atunci ordinul permutării σ este cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor componente.

1.24. Exemplu. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 9 & 3 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 5, 3) \cdot (4, 9, 6)$.

Avem $\operatorname{ord}((1, 2, 5, 3)) = 4$ și $\operatorname{ord}((4, 9, 6)) = 3$, iar ciclurile $(1, 2, 5, 3)$ și $(4, 9, 6)$ sunt independente, deci $\operatorname{ord}(\sigma) = 12$.

1.25. Observație. Putem considera, formal, că punctele fixe ale unei permutări $\sigma \in S_n$, adică acele numere $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $\sigma(i) = i$, sunt cicluri de lungime 1. Considerăm că aceste cicluri au ordinul 1.

Cu această convenţie, pentru orice $\sigma \in S_n$, există $t \in \mathbb{N}^*$ şi ciclurile disjuncte $c_1, c_2, \ldots, c_t$, astfel încât $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_t$ şi $\operatorname{ord}(c_1) + \operatorname{ord}(c_2) + \ldots + \operatorname{ord}(c_t) = n$.

1.26. Exemplu.

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1,3,9,4) \cdot (2,8,6) \cdot (5) \cdot (7)$.

Avem $\operatorname{ord}((1,3,9,4)) = 4$, $\operatorname{ord}((2,8,6)) = 3$, $\operatorname{ord}((5)) = \operatorname{ord}((5)) = 1$, iar ciclurile $(1,2,5,3)$, $(4,9,6)$, (5) şi (7) sunt disjuncte, deci $\operatorname{ord}(\sigma) = 12$ şi $\operatorname{ord}((1,3,9,4)) + \operatorname{ord}((2,8,6)) + \operatorname{ord}((5)) + \operatorname{ord}((7)) = 9$.

1.27. Observaţie (Cauchy). Pentru $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, ne interesează câte permutări există în S_n care să se poată descompune într-un produs de tipul $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, adică permutări care să aibă k_1 cicluri de lungime 1, k_2 cicluri de lungime 2, ..., k_n cicluri de lungime n şi toate aceste cicluri să fie disjuncte.

Aşadar, trebuie să avem $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot n = n$.

Notând $k_n = m_1$, $k_{n-1} + k_n = m_2, \ldots, k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m_n$, obţinem:
$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_n \text{ şi } m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n.$$

Dacă găsim n-uplurile $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ cu proprietăţile de dinainte, vom afla şi tipurile de descompunere $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ posibile în S_n. Procedăm astfel:

a) Scriem toate n-uplurile $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, cu $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, astfel încât $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_n$ şi $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n$ (numite, formal, *partiţiile* lui n).
Cu ajutorul numerelor $m_1, m_2, \ldots, m_n$ se determină lungimile (şi ordinele) ciclurilor care apar într-o permutare din S_n.

b) Calculăm $k_1 = m_n - m_{n-1}$, $k_2 = m_{n-1} - m_{n-2}$, ..., $k_{n-1} = m_2 - m_1$ şi $k_n = m_1$ şi obţinem n-uplul $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Deoarece avem $n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i$, în S_n vor exista permutări care să aibă *tipul de descompunere* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Cauchy a demonstrat că numărul tuturor permutărilor din S_n care sunt de tipul $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ este: $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n! \cdot 1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot \ldots \cdot n^{k_n}}$.

1.28. Exemplu. Determinăm toate tipurile de descompunere posibile în S_4 şi permutările de tipurile respective.

Partiţiile lui $n = 4$ sunt: $(0,0,0,4), (0,0,2,2), (0,0,1,3), (0,1,1,2), (1,1,1,1)$.

I. Pentru $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (0,0,0,4)$ obţinem $k_1 = m_4 - m_3 = 4$, $k_2 = m_3 - m_2 = 0$, $k_3 = m_2 - m_1 = 0$ şi $k_4 = m_1 = 0$.

Tipul de descompunere este $(4,0,0,0)$, verificat doar de permutarea identică.

II. Pentru $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(0,0,2,2)$ obținem $k_1=0$, $k_2=2$, $k_3=0$ și $k_4=0$.

Tipul de descompunere este $(0,2,0,0)$, deci permutările trebuie să fie produsul a două transpoziții disjuncte.

Permutările de acest tip sunt $(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)$.

III. Pentru $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(0,0,1,3)$ obținem $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=0$ și $k_4=0$.

Tipul de descompunere este $(2,1,0,0)$, deci permutările de acest tip sunt cele 6 transpoziții: $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$.

IV. Pentru $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(0,1,1,2)$ obținem $k_1=1$, $k_2=0$, $k_3=1$ și $k_4=0$.

Tipul de descompunere este $(1,0,1,0)$, deci permutările de acest tip sunt ciclurile de lungime 3, în număr de 8.

V. Pentru $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(1,1,1,1)$ obținem $k_1=0=k_2=k_3$, și $k_4=1$.

Tipul de descompunere este $(0,0,0,1)$, deci permutările de acest tip sunt ciclurile de lungime 4, în număr de 6.

Reunind permutările de cele 5 tipuri, obținem toate permutările din S_4.

1.29. Definiție. Spunem că permutările $\alpha,\beta\in S_n$ sunt *conjugate* dacă există $x\in S_n$ astfel încât $\beta=x^{-1}\cdot\alpha\cdot x$.

1.30. Observație. Dacă permutările $\alpha,\beta\in S_n$ sunt conjugate, notăm aceasta cu $\alpha\sim\beta$.

Se arată ușor că relația de conjugare este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă). Această relație va fi foarte folositoare în clasa a XII-a.

1.31. Propoziție. Două permutări din S_n sunt conjugate dacă și numai dacă au aceeași structură ciclică (același tip de descompunere).

PROBLEME DE ANTRENAMENT

1.A.1. Demonstrați că nu există $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, astfel încât $\forall\,\sigma\in S_n$, $\sigma^n=e$.

Soluție: Alegem un ciclu $c\in S_n$ de lungime $n-1$. Dar $ord(c)=n-1\nmid n$, deci $c^n\neq e$.

1.A.2. Fie $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Determinați $x\in S_{2k}$ astfel încât

$$x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k\\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2k-1 & 2k & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Soluție: Avem de rezolvat ecuația $x^2 = c$, unde permutarea
$c \overset{not}{=} (1, 3, 5, \ldots, 2k-3, 2k-1, 2, 4, \ldots, 2k)$ este un ciclu de lungime $2k$.

Atunci, $\varepsilon(x^2) = (\varepsilon(x))^2 = 1$, deci x^2 este o permutare pară, iar $\varepsilon(c) = (-1)^{2k-1} = -1$, așadar c este o permutare impară. În concluzie, ecuația $x^2 = c$ nu are soluții.

1.A.3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
Demonstrați că funcția $f : S_n \to S_n$, $f(\sigma) = \sigma^k$ este surjectivă $\Leftrightarrow$ $k = 1$.

Soluție: Implicația „$\Leftarrow$” este evidentă.
„$\Rightarrow$” Presupunem că există $k \in \{2, ..., n\}$ pentru care funcția este surjectivă.
Alegem un ciclu $c \in S_n$ de lungime k. Avem $f(c) = c^k = e$, deci f nu este injectivă. Așadar, f nu este surjectivă.

1.A.4. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$, astfel încât $\forall\, \sigma, \tau \in H$, $\sigma \cdot \tau \in H$. Arătați că:
a) permutarea identică $e \in H$.
b) dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

Soluție: **a)** Fie $\sigma \in H$. Se arată prin inducție că $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^k \in H$. Mulțimea H fiind finită, există $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i < j$, astfel încât $\sigma^i = \sigma^j$, deci $e = \sigma^{j-i} \in H$.
b) Dacă $\sigma = e \in H$, atunci $\sigma^{-1} = e \in H$.
Dacă $\sigma \in H \setminus \{e\}$, atunci există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $\sigma^k = e$.
Obținem că $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1} \in H$.

1.A.5. Arătați că $\forall\, t \in \{0, 1, \ldots, C_n^2\}$, în S_n există permutări cu exact t inversiuni.

Soluție: Permutarea $e' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & n+1-i & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are C_n^2 inversiuni. Vom demonstra că dacă găsim $\sigma \in S_n$ care are k inversiuni, cu $k = \overline{1, C_n^2}$, atunci găsim și o permutare $\tau \in S_n$ care are $k-1$ inversiuni. (1)

Fie $\sigma \in S_n$ o permutare cu $k = \overline{1, C_n^2}$ inversiuni. Atunci, există un indice $j = \overline{1, n-1}$ maxim astfel încât perechea $(j, j+1)$ este o inversiune a lui σ.

Alegem permutarea $\tau \in S_n$, $\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i), & i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1\} \\ \sigma(j+1), & i = j \\ \sigma(j), & i = j+1 \end{cases}$.

Permutarea $\tau = \sigma \cdot (j, j+1)$ are toate inversiunile lui σ, în afară de $(j, j+1)$.
În (1) înlocuim succesiv pe k cu numerele $C_n^2, C_n^2 - 1, \ldots, 1$ și obținem rezultatul.

1.A.6. Arătați că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{\sigma\in S_n} m(\sigma)=\frac{n!}{2}\cdot C_n^2$.

Soluție: a) Fie permutările $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$

și $\sigma'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1-j & \dots & n+1-i & \dots & n \\ \sigma(n) & \sigma(n-1) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(1)\end{pmatrix}$.

Avem că (i,j) este inversiune în σ $\Leftrightarrow$ $(n+1-j,n+1-i)$ nu este inversiune în σ', căci $\begin{cases} i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1-j<n+1-i \\ \sigma(j)<\sigma(i)\end{cases}$. Așadar, $m(\sigma)+m(\sigma')=C_n^2$.

Împărțim mulțimea S_n în $\frac{n!}{2}$ grupe (σ,σ') și obținem că $\sum_{\sigma\in S_n} m(\sigma)=\frac{n!}{2}\cdot C_n^2$.

1.A.7. Arătați că pentru orice permutare $\sigma\in S_n\setminus\{e\}$ și pentru orice $t\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $m(\sigma)\geq t$, există t transpoziții $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_t\in S_n$ astfel încât $m(\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_t\cdot\sigma)=m(\sigma)-t$.

Eugen Păltănea

Soluție: Deoarece $\sigma\in S_n\setminus\{e\}$, putem alege un indice $j_1=\overline{1,n-1}$ minim astfel încât perechea (j_1,j_1+1) este o inversiune a lui σ. Fie $m(\sigma)=k\geq t$.

Atunci, permutarea $\sigma_1=\underbrace{(\sigma(j_1),\sigma(j_1+1))}_{=\tau_1}\cdot\sigma$ are toate inversiunile lui σ, în afară de (j_1,j_1+1), deci $m(\tau_1\cdot\sigma)=m(\sigma)-1$.

Dacă $\sigma_1\neq e$, alegem indicele $j_2=\overline{1,n-1}$ minim astfel încât perechea (j_2,j_2+1) este o inversiune a lui σ. Permutarea $\sigma_2=\underbrace{(\sigma_1(j_2),\sigma_1(j_2+1))}_{=\tau_2}\cdot\tau_1\cdot\sigma$ are toate inversiunile lui σ_1, în afară de (j_2,j_2+1), deci $m(\tau_2\cdot\tau_1\cdot\sigma)=m(\sigma)-2$. Continuăm procedeul și după un număr finit de pași obținem rezultatul.

1.A.8. Se consideră $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ și permutarea $\sigma\in S_n$ cu $\sigma(1)=1$ și $\sigma(2)=2$. Arătați că numărul permutărilor pare din S_n care comută cu σ este egal cu numărul permutărilor impare din S_n care comută cu σ.

Gabriela Burghelea,
G.M. 9 / 2012

Soluție: Notăm cu H mulțimea permutărilor din S_n care comută cu σ.
Observăm mai întâi că dacă $\alpha,\beta\in H$, atunci

$$(\alpha\beta)\sigma=\alpha(\beta\sigma)\overset{\beta\in H}{=}\alpha(\sigma\beta)=(\alpha\sigma)\beta\overset{\alpha\in H}{=}(\sigma\alpha)\beta=\sigma(\alpha\beta).$$

Așadar, $\forall\, \alpha, \beta \in H \;\Rightarrow\; \alpha\beta \in H$. Mai mult, transpoziția $(1,2) \in H$.

Definim funcția $f : H \to H$, $f(x) = (1,2)\cdot x$. Se arată ușor că f este bijectivă.

Mai mult, $\forall\, x \in H$, $\varepsilon(f(x)) = -\varepsilon(x)$.

Atunci, dacă $x \in H$, avem: x este permutare pară $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este permutare impară.

Așadar, numărul permutărilor pare din H coincide cu cel al permutărilor impare din H.

1.A.9. Dacă $x_1, x_2, x_3 \in (1,2)$, demonstrați că

$$\forall\, \sigma \in S_3,\ 16\sqrt{2} \le \left(x_1 + \frac{2}{x_{\sigma(1)}}\right)\left(x_2 + \frac{2}{x_{\sigma(2)}}\right)\left(x_3 + \frac{2}{x_{\sigma(3)}}\right) < 27.$$

Soluție: Avem: $\qquad \forall\, x \in (1,2),\ x + \dfrac{2}{x} < 3 \qquad (*)$.

Folosind inegalitatea mediilor, obținem:

$$P = \left(x_1 + \frac{2}{x_{\sigma(1)}}\right)\left(x_2 + \frac{2}{x_{\sigma(2)}}\right)\left(x_3 + \frac{2}{x_{\sigma(3)}}\right) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dfrac{2}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \dfrac{2}{x_3}}{3}\right)^3 \overset{(*)}{<} 27$$

și $$P = \left(x_1 + \frac{2}{x_{\sigma(1)}}\right)\left(x_2 + \frac{2}{x_{\sigma(2)}}\right)\left(x_3 + \frac{2}{x_{\sigma(3)}}\right) \ge 8\cdot\sqrt{\frac{2x_1}{x_{\sigma(1)}}}\cdot\sqrt{\frac{2x_2}{x_{\sigma(2)}}}\cdot\sqrt{\frac{2x_3}{x_{\sigma(3)}}} = 16\sqrt{2}.$$

1.A.10. Determinați $\sigma \in S_n$ astfel încât $\forall\, k \in \{2, ..., n\}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sigma(i)\sigma(i+1)} = \frac{k-1}{k}$.

Dana Heuberger

Soluție: Pentru $n = 2$, cele două permutări din S_2 sunt soluții.

Pentru $n \ge 3$ și $k \in \{3, ..., n\}$ oarecare, avem $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{\sigma(i)\sigma(i+1)} = \frac{k-2}{k-1}$ și, înlocuind în relația din enunț, obținem: $\dfrac{1}{\sigma(k-1)\sigma(k)} = \dfrac{k-1}{k} - \dfrac{k-2}{k-1}$.

Așadar, $\forall\, k \in \{3, ..., n\}$, $\sigma(k-1)\cdot\sigma(k) = k\cdot(k-1)$.

Obținem că $\sigma(n-1)\cdot\sigma(n) = n\cdot(n-1)$ și cum $\sigma(n-1)\cdot\sigma(n) \le n\cdot(n-1)$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $\begin{cases}\sigma(n-1) = n-1\\ \sigma(n) = n\end{cases}$ sau $\begin{cases}\sigma(n-1) = n\\ \sigma(n) = n-1\end{cases}$.

În primul caz, obținem $\sigma = e$.

În cazul al doilea, obținem $n\cdot\sigma(n-2) = (n-2)(n-1)$, adică $n / 2$, fals.

PROBLEME DE OLIMPIADĂ

1.O.1. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi $x\in S_n$ astfel încât $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix}$.

1.O.2. Pentru permutarea $\sigma\in S_n$, notăm cu k cel mai mic exponent din $\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k=e$ şi definim funcţia

$$f_\sigma:\{1,2,\dots,n\}\to\mathbb{N},\ f_\sigma(i)=\sigma(i)+\sigma^2(i)+\dots+\sigma^k(i).$$

a) Determinaţi $\sigma\in S_3$ pentru care funcţia f_σ este constantă.

b) Determinaţi $\sigma\in S_4$ pentru care funcţia f_σ este constantă.

Dana Heuberger

1.O.3. Fie p un număr prim şi $G\subset S_p$ astfel încât $\forall\,\sigma,\tau\in G\ \Rightarrow\ \sigma\cdot\tau\in G$.
Dacă G conţine o permutare de ordinul p şi o transpoziţie, arătaţi că $G=S_p$.

1.O.4. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $k\in\{0,1,\dots,n\}$. Notăm cu $p_n(k)$ numărul permutărilor din S_n care au exact k puncte fixe. Arătaţi că $p_n(n)=1$, $p_n(n-1)=0$ şi

$$\forall\,k\in\{0,1,\dots,n-2\},\ p_n(k)=\frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

Reamintim că $i\in\{0,1,\dots,n\}$ este un punct fix al lui $\sigma\in S_n\ \Leftrightarrow\ \sigma(i)=i$.

1.O.5. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $k\in\{0,1,\dots,n\}$. Notăm cu $p_n(k)$ numărul permutărilor din S_n care au exact k puncte fixe. Arătaţi că $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot p_n(k)=n!$.

Olimpiada Internaţională de Matematică, 1987

1.O.6. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $k\in\mathbb{N}$.
Notăm cu $q_n(k)$ numărul permutărilor din S_n care au exact k inversiuni.

a) Arătaţi că $q_{n+1}(k)=\sum\limits_{j=0}^{n}q_n(k-j)$.

(Dacă avem $k-j<0$ sau $k-j>\dfrac{n(n-1)}{2}$, atunci considerăm că $q_n(k-j)=0$.)

b) Calculaţi $q_n(1)$, $q_n(2)$ şi $q_n(3)$.

1.O.7. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi $T_n\subset S_n$ mulţimea tuturor transpoziţiilor de gradul n. Dacă $A=\{t_1,t_2,\dots,t_m\}\subseteq T_n$ este o mulţime de transpoziţii care îl generează pe S_n, arătaţi că $m\geq n-1$.

1.O.8. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notăm cu p_n numărul permutărilor din S_n care au exact două inversiuni și cu q_n numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ pentru care există un singur număr $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ astfel încât $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $q_n = 2 + p_n$.

Constantin Ursu

1.O.9. Fie $n \geq 2$ și c un ciclu de lungime $m \geq 2$ din S_n. Fie $\alpha = c^k$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\operatorname{ord}(\alpha) = \dfrac{m}{d}$, unde $d = (m, k)$.

b) Arătați că α se poate scrie ca un produs de d cicluri disjuncte, fiecare având lungimea $\dfrac{m}{d}$.

1.O.10. a) Demonstrați că oricare ar fi 61 de permutări din S_5, există printre ele două care comută.

b) Demonstrați că oricare ar fi 61 de permutări din S_5, există printre ele două care nu comută.

Ion Savu

1.O.11. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Pentru $p = \overline{1, n}$, definim mulțimile $A_p = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{p\}$ și $B_p = \{(a, b) \in A_p \times A_p \mid a < b\}$. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ să avem $\sum\limits_{(a,b) \in B_p} \sigma(a)\sigma(b) \geq \sum\limits_{(a,b) \in B_p} ab$.

Manuela Prajea

SOLUȚIILE PROBLEMELOR DE OLIMPIADĂ

1.S.1. Avem $\varepsilon(x^2) = (\varepsilon(x))^2 = 1$, deci permutarea din membrul drept trebuie să fie pară, pentru ca ecuația $x^2 = \sigma$ să poată avea soluții.

Cum $c \overset{not}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, \dots, n)$ este un ciclu de lungime n, deci

$\varepsilon(c) = (-1)^{n-1}$, rezultă că $n = 2p+1$, cu $p \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & 2p & 2p+1 \\ x(1) & x(2) & \dots & x(p) & x(p+1) & x(p+2) & \dots & x(2p) & x(2p+1) \end{pmatrix}$.

Fie $i = \overline{1, 2p}$. Din ipoteză, avem $x(x(i)) = i+1$.

Dacă $x(i) \overset{not}{=} k \leq 2p$, atunci $x(i+1) = x(x(x(i))) = x(x(k)) = k+1$ (1)

Notăm $x(1) = a \geq 2$. Avem $x(a) = x(x(1)) = 2$.

Presupunem că $a \leq p+1$. Din (1) rezultă $x(2) = a+1$, apoi $x(3) = a+2$ ş.a.m.d.

După un număr finit de paşi, obţinem că $x(a) = a + a - 1 = 2a - 1$, contradicţie cu $x(a) = 2$. Aşadar, $a \geq p+2$.

Dacă am avea $a = 2p+1$, atunci ar rezulta $2 = x(x(1)) = x(2p+1)$.

Apoi, $x(2) = x(x(2p+1)) \overset{ip}{=} 1$ şi din (1) obţinem că $x(3) = 2 = x(2p+1)$, fals. Aşadar, $a \leq 2p$.

Din (1) obţinem $x(2) = a+1$, apoi $x(3) = a+2$ ş.a.m.d.

După un număr finit de paşi, obţinem că $x(\underbrace{2p+2-a}_{\leq p}) = a + (2p+1-a) = 2p+1$.

Apoi, $2p+3-a \overset{ip}{=} x(x(2p+2-a)) = x(2p+1)$ şi $1 \overset{ip}{=} x(x(2p+1)) = x(2p+3-a)$.

Obţinem $2p+4-a \overset{ip}{=} x(x(2p+3-a)) = x(1) = a \Leftrightarrow a = p+2$.

Folosind relaţia (1) deducem că singura soluţie este permutarea

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & 2p & 2p+1 \\ p+2 & p+3 & \dots & 2p+1 & 1 & 2 & \dots & p & p+1 \end{pmatrix}.$$

1.S.2. a) Soluţiile sunt transpoziţia $(1\,3)$ şi ciclurile de lungime 3.

b) Să observăm că permutarea identică nu este o soluţie. Fie $\sigma \in S_4 \setminus \{e\}$.

1. Dacă $\sigma = (i\,j)$ este o transpoziţie, atunci $\operatorname{ord}(\sigma) = 2$.

Pentru $m_1, m_2 \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$, $f_\sigma(m_1) = 2m_1$ şi $f_\sigma(m_2) = 2m_2$, deci funcţia f_σ nu este constantă.

2. Dacă $c = (i, j, k)$ este un ciclu de lungime 3 şi $\{l\} = \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j,k\}$, atunci obţinem $f_c(i) = f_c(j) = f_c(k) = i+j+k = 3l = f_c(l) \Rightarrow \{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ sau $\{i,j,k\} = \{2,3,4\}$.

În primul caz, $i+j+k = 6 \neq 12 = 3l$, iar în cel de-al doilea, $i+j+k = 9 \neq 3 = 3l$, deci σ nu este o soluţie.

3. Dacă $\sigma = (i\,j)(k\,l)$ cu $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$, atunci $\operatorname{ord}(\sigma) = 2$.

Dacă $t \in \{i,j\}$, atunci $f_\sigma(t) = i+j$, iar dacă $t \in \{k,l\}$ atunci $f_\sigma(t) = k+l$.

Aşadar, f_σ este constantă $\Leftrightarrow$ $i+j = k+l$ $\Leftrightarrow$ $\sigma = (1\,4)(2\,3)$.

4. Dacă σ este un ciclu de lungime 4, atunci $\operatorname{ord}(\sigma) = 4$ şi

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}, \quad f_\sigma(i) = 1+2+3+4 = 10.$$